1. Sformułuj zasadę zachowania masy dla obszaru obliczeniowego w 2D lub 3D, a następnie wyprowadź na jej podstawie powiązane równanie różniczkowe.

2. Sformułuj zasadę zachowania pędu dla obszaru obliczeniowego w 2D lub 3D, a następnie wyprowadź na jej podstawie powiązane równanie różniczkowe.

3. Przedstaw i zilustruj graficznie twierdzenie o transporcie Reynoldsa. Jakich sytuacji przy opisie zjawisk fizycznych dotyczy to twierdzenie?

4. Przedstaw i zilustruj graficznie twierdzenie o dywergencji (w różnych kontekstach znane także jako twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradskiego).

5. Scharakteryzuj dwa podstawowe typy opisu zachowania ośrodka odkształcalnego: Eulera i Lagrange'a. Przedstaw zasadę zachowania masy w postaci całkowej dla każdego z opisów.

6. Podaj wektorową formę zasad zachowania dla przepływów ściśliwych (równań Naviera-Stokesa). Podaj jakie są niewiadome, dla których formułowane są zasady zachowania (szczegółowe wzory na strumienie związane z niewiadomymi nie są istotne – istotna jest natomiast idea zasad zachowania i ich powiązanie z odpowiednimi strumieniami).

7. Omów wyrazy występujące w równaniu wymiany ciepła (niestacjonarnym z uwzględnieniem konwekcji). Jakim fizycznym zjawiskom i procesom odpowiadają? Jakie są związane z nimi podstawowe zależności (prawa zachowania i równania konstytutywne). Jakiego typu jest to równanie różniczkowe w ogólności i w szczególnych przypadkach (brak konwekcji, zadanie stacjonarne, itp.)?

8. Scharakteryzuj podstawowe typy warunków brzegowych dla równania wymiany ciepła (stacjonarnego i niestacjonarnego, bez uwzględnienia konwekcji i z uwzględnieniem konwekcji).

9. Podaj ogólną postać i krótko scharakteryzuj właściwości równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu eliptycznego. Przedstaw przykłady dla wybranych problemów fizycznych.

10. Podaj ogólną postać i krótko scharakteryzuj właściwości równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu parabolicznego. Przedstaw przykłady dla wybranych problemów fizycznych.

11. Podaj ogólną postać i krótko scharakteryzuj właściwości równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu hiperbolicznego. Przedstaw przykłady dla wybranych problemów fizycznych.

12. Podaj warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań (w szczególności możliwe i wymagane warunki brzegowe) dla problemów brzegowych typu eliptycznego. Dla konkretnej postaci równania (np. problem Poissona lub równanie transferu ciepła) podaj przykładowe wzory warunków brzegowych.

13. Podaj warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań (w szczególności możliwe i wymagane warunki brzegowe) dla problemów początkowo-brzegowych typu parabolicznego. Dla konkretnej postaci równania (np. niestacjonarny transfer ciepła bez konwekcji) podaj przykładowe wzory warunków brzegowych.

14. Podaj warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań (w szczególności możliwe i wymagane warunki brzegowe) dla problemów początkowo-brzegowych typu hiperbolicznego (w szczególności jako zasad zachowania). Dla konkretnej postaci równania (np. równanie bilansu masy gazów ściśliwych lub równania Naviera-Stokesa) podaj przykładowe wzory warunków brzegowych.

15. Dla niestacjonarnego równania czystej konwekcji (adwekcji) pokaż, że sprowadza się ono do warunku dla pochodnej w kierunku związanym z prędkością unoszenia. Zilustruj przepływ dla równania jednorodnego w obszarze 1D, stałego pola prędkości unoszenia i zadanego początkowego rozkładu unoszonej niewiadomej, reprezentującej pewna wielkość fizyczną.

16. Przedstaw równanie stacjonarnego zagadnienia konwekcji-dyfuzji dla zmiennej skalarnej w obszarze jednowymiarowym z warunkami brzegowymi Dirichleta. Omów charakter rozwiązania dla przypadku dominującej dyfuzji i dominującej konwekcji.

17. Omów proces bezpośredniego rozwiązywania wielkich rzadkich układów równań liniowych, powstających przy dyskretyzacji zagadnień eliptycznych (np. metodą elementów skończonych), za pomocą wariantów metody Gaussa (np. dekompozycji LU). Wskaż jakie są kluczowe czynniki decydujące o złożoności obliczeniowej algorytmów i sposoby jej redukcji

18. Omów proces iteracyjnego rozwiązywania wielkich rzadkich układów równań liniowych, powstających przy aproksymacji zagadnień eliptycznych, np. metodą elementów skończonych. Podaj przykłady metod iteracyjnych i wybrane algorytmy (np. dla metod iteracji prostej – Jacobiego i Gaussa-Seidla).

19. Czym jest poprawa uwarunkowania macierzy układu równań liniowych (*preconditionning*). Dla jakich metod iteracyjnych jest ona stosowana, do jakiego celu zmierza i w jaki sposób jest realizowana (podaj przykład metody poprawy uwarunkowania macierzy układu)?

20. Podaj wzory dla metody Picarda rozwiązywania układów równań nieliniowych o postaci: $A(U)U=b$, powstających przy aproksymacji zagadnień eliptycznych metodą elementów skończonych (jako szczególny przypadek zastosowania iteracji Picarda dla równania $x=g(x)$).

21. Zilustruj graficznie proces zbieżności metody Newtona dla nieliniowego równania jednej zmiennej $f(x)=0$. Podaj wzory charakterystyczne dla metody w tym przypadku.

----

22. Scharakteryzuj różnice między siatkami strukturalnymi i niestrukturalnymi. Podaj wady i zalety każdego z typów. Z jakimi metodami dyskretyzacji równań różniczkowych cząstkowych związane są różne typy siatek?

23. Podaj i graficznie zilustruj 3 przykładowe normy w przestrzeni funkcji na odcinku [0,1]

24. Pokaż jak wygląda interpolacja funkcji za pomocą wielomianów i funkcji kawałkami wielomianowych. Jak zachowuje się błąd interpolacji, podaj oszacowanie błędu dla interpolacji kawałkami wielomianowej, dla różnych stopni wielomianów.

25. Wyprowadź kilka przykładowych wzorów różnicowych dla pierwszej pochodnej funkcji korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora, które używa wartości funkcji w punktach odległych o *h* wzdłuż osi *x*. Określ rząd wielkości błędu uzyskanej aproksymacji pierwszej pochodnej funkcji.

26. Wyprowadź dowolny wzór różnicowy dla drugiej pochodnej funkcji korzystając z wartości funkcji w punktach odległych o *h* wzdłuż osi *x*.

27. Przedstaw przykład zastosowania dyskretyzacji metodą różnic skończonych dla zadanego eliptycznego równania różniczkowego w dwuwymiarowym obszarze przestrzennym (np. problemu Poissona). Czym jest tzw. szablon (*stencil*), jakie jest jego znaczenie w procesie rozwiązywania układu równań liniowych związanego z dyskretyzacją?

28. Przedstaw przykład zastosowania jawnej dyskretyzacji metodą różnic skończonych dla zadanego parabolicznego niestacjonarnego równania różniczkowego cząstkowego z jednowymiarowym obszarem przestrzennym (np. niestacjonarnego transferu ciepła w pręcie). Czym jest tzw. szablon (*stencil*), jakie jest jego znaczenie w procesie rozwiązywania układu równań liniowych związanego z dyskretyzacją?

29. Przedstaw przykład zastosowania niejawnej dyskretyzacji metodą różnic skończonych dla zadanego hiperbolicznego niestacjonarnego równania różniczkowego cząstkowego z jednowymiarowym obszarem przestrzennym (np. najprostszego zadania czystej konwekcji du/dt+v*du/dx=0). Czym jest tzw. szablon (*stencil*), jakie jest jego znaczenie w procesie rozwiązywania układu równań liniowych związanego z dyskretyzacją?

30. Czym jest rząd metody aproksymacji (dyskretyzacji). Podaj przykład schematu różnicowego aproksymacji równania różniczkowego zwyczajnego liniowego rzędu pierwszego du/dt = f(t, u) z dokładnością rzędu pierwszego i rzędu drugiego.

31. Podaj przykład jawnej i niejawnej aproksymacji metodą różnic skończonych problemu wymiany ciepła zależnego od czasu w jednym wymiarze przestrzennym (bez konwekcji). Jakie są podstawowe różnice, z obliczeniowego punktu widzenia, pomiędzy metodami aproksymacji jawnymi i niejawnymi?

32. Scharakteryzuj tzw. metodę α-dyskretyzacji równań różniczkowych zwyczajnych. Omów, w szczególności pod kątem dokładności i stabilności, trzy podstawowe warianty metody: jawną metodę Eulera, niejawną metodę Eulera i metodę Cranka-Nicolson,.

33. Czym jest *upwinding* przy dyskretyzacji równań różniczkowych czystej konwekcji lub z dominującą konwekcją? Jakim trudnościom przy dyskretyzacji zapobiega? Podaj przykładowy schemat stosujący *upwinding* dla zadania czystej konwekcji w jednym wymiarze przestrzennym.

34. Czym jest liczba CFL? Jakie jest jej znaczenie przy dyskretyzacji problemów zależnych od czasu z dominującą konwekcją, w szczególności metodami jawnymi?

35. Przedstaw ideę metody objętości skończonych, np. dla wektorowej lub skalarnej postaci wybranego prawa zachowania – jakie są podstawowe zasady (dyskretyzacja obszaru i równań) oraz dodatkowe techniki w praktycznych obliczeniach.

36. Czym jest spójność (consistency) metody dyskretyzacji?Jak brzmi podstawowe twierdzenie analizy numerycznej? Podaj przykład spójnej i niespójnej metody dyskretyzacji (np. dla równania czystej konwekcji przedstaw dyskretyzację bez i z sztuczną lepkością - metodą różnic skończonych lub elementów skończonych).

37. Na czym polega stabilność metody dyskretyzacji równań różniczkowych cząstkowych? W przypadku jakich typów zagadnień często pojawiają się problemy ze stabilnością aproksymacji?

38. Przedstaw założenia dyskretyzacji niestacjonarnych zagadnień konwekcji-dyfuzji metodą linii. Jaka jest zakładana postać funkcji niewiadomej i jej pochodnych?

39. Omów proces dyskretyzacji metodą linii, wykorzystujący specjalną postać funkcji aproksymującej, dla wybranego zagadnienia konwekcji-dyfuzji. Podaj sformułowanie słabe MES uzyskiwane w pierwszym etapie dyskretyzacji.

40. Przedstaw proces przekształcenia równania różniczkowego cząstkowego konwekcji-dyfuzji w układ równań różniczkowych zwyczajnych w metodzie linii. Jakie są zwyczajowe nazwy macierzy współczynników w tym układzie?

41. Kiedy stosowana jest metoda całkowania w czasie w celu rozwiązania zadań stacjonarnych? W jaki sposób przebiega proces aproksymacji? Jakie są wady i zalety metod jawnych i niejawnych dyskretyzacji czasowej użytych w takiej sytuacji?

42. Na czym polega stabilizacja przy dyskretyzacji metodą elementów skończonych stacjonarnych równań konwekcji-dyfuzji z dominującą konwekcją? W jaki sposób można osiągnąć spójność dyskretyzacji ze stabilizacją? Omów poglądowo stabilizację SUPG.

43. Zdefiniuj elementową liczbę Pecleta dla dyskretyzacji zagadnień stacjonarnych konwekcji-dyfuzji. Jaki wpływ ma ona na stabilność rozwiązań? Naszkicuj krzywe zbieżności aproksymacji MES dla stacjonarnego zadania konwekcji-dyfuzji w 1D w zależności od liczby Pecleta.

44. Scharakteryzuj własność najlepszej aproksymacji (*best aproximation property*) dla rozwiązań uzyskiwanych metodą elementów skończonych (podaj związany z nią wzór charakteryzujący błąd aproksymacji MES). W jaki sposób jest ona wykorzystywana do uzyskania oszacowania *a priori* błędu MES?

45. Podaj ogólny wzór oszacowania *a priori* błędu aproksymacji MES. Jakie wynikają z niego wnioski, pozwalające uzyskiwać bardziej dokładne rozwiązania?

46. Przedstaw wykresy zbieżności dla aproksymacji problemów eliptycznych metodą elementów skończonych z funkcjami kształtu będącymi wielomianami stopnia p.

47. Scharakteryzuj różne typy adaptacji MES. Jak przebiega proces uzyskiwania rozwiązania z użyciem adaptacji dla zadań eliptycznych?

48. Scharakteryzuj różne typy adaptacji MES. Jak przebiega proces uzyskiwania rozwiązania z użyciem adaptacji dla zadań zależnych od czasu?

49. Czym jest osobliwość rozwiązania? W jaki sposób przebiega modelowanie adaptacyjne dla zagadnień osobliwych? W jaki sposób można przyspieszyć uzyskiwanie dokładnych wyników?

50. Omów różne typy błędów pojawiających się w modelowaniu matematycznym i numerycznym zagadnień opisywanych równaniami różniczkowymi. W jaki sposób można minimalizować każdy z rodzajów błędu?

----

51. Mając sformułowanie słabe dla problemu brzegowego z warunkiem Dirichleta (np. problemu Poissona lub problemu stacjonarnego transferu ciepła bez konwekcji), uzupełnij je w przypadku dodania warunku brzegowego Neumanna (Robina)

52. Dla zadanego problemu brzegowego z warunkiem Dirichleta (np. problemu Poissona lub problemu stacjonarnego transferu ciepła bez konwekcji) wyprowadź sformułowanie słabe.

53. W jaki sposób uwzględniane są warunki brzegowe Dirichleta w sformułowaniu słabym? Podaj przykład problemu brzegowego z warunkiem Dirichleta (np. problemu Poissona lub problemu stacjonarnego transferu ciepła bez konwekcji) wraz z odpowiadającym mu sformułowaniem słabym (zwróć szczególną uwagę na definicje przestrzeni funkcyjnych w sformułowaniu).

54. Omów metodę funkcji kary, jako sposób wymuszania spełnienia warunków brzegowych Dirichleta w symulacjach MES (poprzez zastosowanie szczególnego warunku brzegowego III rodzaju - Robina).

55. Dla zadanej postaci sformułowania słabego wskaż człony związane z różnymi typami wyrażeń w sformułowaniu analitycznym (np. człony związane z pochodna czasową, z dyfuzją, konwekcją, itp.) i omów ich wpływ na rozwiązanie dokładne oraz na techniki i efekt dyskretyzacji.

56. Jakie są warunki poprawnej dyskretyzacji (triangulacji) obszaru obliczeniowego w MES. Jakie geometryczne warunki powinny spełniać elementy skończone. Omów podstawowe typy elementów stosowane do triangulacji obszarów w 1D, 2D, 3D. Podaj ich wady i zalety.

57. Zilustruj podstawowe typy geometrii elementów skończonych w 1D, 2D, 3D. W jaki sposób geometria elementu jest definiowana na podstawie tzw. elementu odniesienia (referencyjnego)?

58. Zilustruj funkcje kształtu Lagrange'a pierwszego stopnia dla elementów odniesienia: trójkątnego i prostokątnego.

59. Zilustruj funkcje kształtu Lagrange'a drugiego stopnia dla elementu odniesienia będącego prostokątem.

60. Zilustruj funkcje kształtu Lagrange'a drugiego stopnia dla elementu odniesienia będącego trójkątem.

61. Porównaj konstrukcję funkcji bazowych w obszarze 1D dla aproksymacji drugiego stopnia w przypadku użycia wielomianów Lagrange'a i hierarchicznych funkcji kształtu. Jakie są wady/zalety użycia funkcji kształtu każdego z typów.

62. Przedstaw proces interpolacji dowolnej zadanej funkcji w obszarze 1D za pomocą funkcji z przestrzeni MES rozpiętej na funkcjach bazowych, w przypadku konstrukcji funkcji bazowych na podstawie hierarchicznych funkcji kształtu, będących wielomianami drugiego stopnia.

63. Przedstaw proces interpolacji dowolnej zadanej funkcji w obszarze 1D za pomocą funkcji z przestrzeni MES rozpiętej na funkcjach bazowych, w przypadku konstrukcji funkcji bazowych na podstawie funkcji kształtu, będących wielomianami Lagrange'a pierwszego stopnia

64. Przedstaw proces interpolacji dowolnej zadanej funkcji w obszarze 1D za pomocą funkcji z przestrzeni MES rozpiętej na funkcjach bazowych, w przypadku konstrukcji funkcji bazowych na podstawie funkcji kształtu, będących wielomianami Lagrange'a drugiego stopnia

65. Przedstaw proces konstrukcji dowolnej funkcji w przestrzeni MES dla obszaru 1D jako kombinacji liniowej funkcji bazowych w przypadku użycia funkcji kształtu będących wielomianami Lagrange'a drugiego stopnia

66. Przedstaw proces konstrukcji dowolnej funkcji w przestrzeni MES dla obszaru 1D jako kombinacji liniowej funkcji bazowych w przypadku użycia hierarchicznych funkcji kształtu będących wielomianami drugiego stopnia

67. Dla zadanej siatki i postaci aproksymacji MES (rząd oraz typ – Lagrange'a lub hierarchiczny) przedstaw strukturę (wyrazów niezerowych) globalnej macierzy układu równań (macierzy sztywności). W jaki sposób można zmienić strukturę wyrazów niezerowych macierzy? W jakim przypadku zmiana struktury ma istotne znaczenie w procesie uzyskiwania rozwiązania (w szczególności dla czasu obliczeń)?

68. Dla zadanej siatki i postaci aproksymacji MES (rząd oraz typ – Lagrange'a lub hierarchiczny) podaj strukturę lokalnej macierzy sztywności dla pojedynczego elementu i schemat jej agregacji do globalnego układu równań liniowych.

69. Mając zadane sformułowanie słabe przedstaw jakie całki będą obliczane dla pojedynczego elementu podczas tworzenia elementowej macierzy sztywności.

70. Przedstaw proces całkowania numerycznego z wykorzystaniem elementu odniesienia. Podaj graficzną ilustrację procesu dla przykładu siatki 2D z kilkoma elementami.

71. Mając zadane sformułowanie słabe (całkowe) MES przedstaw procedurę jego transformacji do układu równań liniowych. Jak wykorzystuje się fakt, że równanie całkowe w sformułowaniu MES jest prawdziwe dla dowolnej funkcji testującej?

72. Czym różni się interpolacja MES od aproksymacji MES?