

Tematy, zadania i pytania MMNiT:

(tematy, zadania i pytania zapisane kursywą nie obowiązują w roku 2022)

- podstawowe prawa fizyki
 - zasady zachowania – w sformułowaniu całkowym i różniczkowym
 - (1.1) masy,
 - (1.2) pędu,
 - (1.3) energii,
 - (1.4) ogólna postać prawa zachowania (w 1D i 3D)
 - modele materiałowe, równania konstytutywne
 - (1.5) związek temperatury z energią,
 - (1.6) postać tensora naprężeń dla płynów, płyny newtonowskie – naprężenia ścinające, lepkość
 - twierdzenia związane z matematycznym opisem wielkości fizycznych
 - (1.7) twierdzenie o transporcie
 - (1.8) twierdzenie o dywergencji (Gaussa-Ostrogradskiego)
 - podstawowe typy opisu procesów fizycznych
 - (1.9) opis Lagrange'a
 - (1.10) opis Eulera
- 1. Sformułuj zasadę zachowania (abstrakcyjną lub konkretną) dla wybranego obszaru obliczeniowego w 1D, 2D lub 3D, a następnie wyprowadź na jej podstawie powiązane równanie różniczkowe.
- 2. Sformułuj zasadę zachowania masy dla wybranego obszaru obliczeniowego w 1D, 2D lub 3D, a następnie wyprowadź na jej podstawie powiązane równanie różniczkowe.
- 3. *Sformułuj zasadę zachowania pędu dla wybranego obszaru obliczeniowego w 1D, 2D lub 3D, a następnie wyprowadź na jej podstawie powiązane równanie różniczkowe.*
- 4. Przedstaw i zilustruj graficznie twierdzenie o transporcie Reynoldsa.
- 5. Przedstaw i zilustruj graficznie twierdzenie o dywergencji (w różnych kontekstach znane także jako twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego).
- 6. Scharakteryzuj dwa podstawowe typy opisu zachowania ośrodka odkształcalnego: Eulera i Lagrange'a. Przedstaw zasadę zachowania masy w postaci całkowej dla każdego z opisów.
- 7. *Omów zależność strumienia ciepła od temperatury, powiąż temperaturę z innymi wielkościami termodynamicznymi i podaj odpowiednie wzory, w tym wzory używane w modelowaniu transferu ciepła i przepływów płynów ściśliwych.*
- 8. *Scharakteryzuj czym jest tensor naprężeń. Podaj specyficzną formę tensora naprężeń dla płynów (cieczy i gazów) używaną w modelowaniu przepływów.*
- modelowanie przewodnictwa cieplnego i przepływu płynu nieściśliwego
 - problem przewodnictwa cieplnego (zależny od czasu, z konwekcją)
 - (3.1) sformułowanie różniczkowe – związek z zasadą zachowania energii

- (3.2) dominująca konwekcja lub dyfuzja
 - (3.3) warunki brzegowe (trzy rodzaje)
 - przepływy nieściśliwe
 - (3.4) równania Naviera-Stokesa – bilans masy, równanie ciągłości
 - (3.5) równania Naviera-Stokesa – bilans pędu
 - (3.6) warunki brzegowe
 - modele materiałowe, równania konstytutywne
 - (3.7) prawo Fouriera dla przewodnictwa cieplnego, strumień ciepła, współczynnik przewodnictwa cieplnego
 - (3.8) założenia dotyczące płynów nieściśliwych (gęstość, ciśnienie)
9. Omów idee lepkości w płynach Newtonowskich. Podaj proste wyprowadzenie dla przykładu przepływu w pobliżu ściany (zmiana prędkości tylko prostopadle do niej) i uogólnij dla dowolnego punktu w obszarze przepływu.
10. Scharakteryzuj równania ciągłości (bilansu masy) i zasady zachowania pędu (bilansu pędu) dla płynów ściśliwych. Przedstaw wektorową formę równań Naviera-Stokesa dla przepływów ściśliwych (pomijając detale bilansu energii), jako przykład zasad zachowania.
11. Podaj wektorową formę zasad zachowania dla przepływów ściśliwych (równań Naviera-Stokesa). Podaj jakie są niewiadome, dla których formułowane są zasady zachowania (szczegółowe wzory na strumienie związane z niewiadomymi nie są istotne – istotna jest natomiast idea zasad zachowania i ich powiązanie z odpowiednimi strumieniami).
12. Czym różni się przepływy ściśliwe od nieściśliwych? Jak wpływa to na postać równań Naviera-Stokesa?
13. Omów wyrazy występujące w równaniach Naviera-Stokesa dla przepływów nieściśliwych. Jakim fizycznym zjawiskom i procesom odpowiadają? Jakie są związane z nimi podstawowe zależności (prawa zachowania i równania konstytutywne).
14. Scharakteryzuj podstawowe typy warunków brzegowych dla równań Naviera-Stokesa przepływów nieściśliwych.
15. Omów wyrazy występujące w równaniu wymiany ciepła (niestacjonarnym z uwzględnieniem konwekcji). Jakim fizycznym zjawiskom i procesom odpowiadają? Jakie są związane z nimi podstawowe zależności (prawa zachowania i równania konstytutywne). Jakiego typu jest to równanie różniczkowe w ogólności i w szczególnych przypadkach (brak konwekcji, zadanie stacjonarne, itp.)?
16. Scharakteryzuj podstawowe typy warunków brzegowych dla równania wymiany ciepła (stacjonarnego i niestacjonarnego, bez uwzględnienia konwekcji i z uwzględnieniem konwekcji).
- typy równań różniczkowych cząstkowych II rzędu i matematyczne warunki poprawności postawienia problemów brzegowych i początkowo-brzegowych
 - równania różniczkowe cząstkowe II rzędu – podstawowa charakterystyka, przykłady
 - (2.1) eliptyczne
 - (2.2) paraboliczne
 - (2.3) hiperboliczne
 - (2.4) równania liniowe i nieliniowe

- problemy brzegowe i początkowo-brzegowe – zestaw warunków brzegowych i początkowych oraz ich postać, wymagane dla poprawności postawienia problemu (istnienia i jednoznaczności rozwiązania) w przypadku różnych typów równań różniczkowych:
 - (2.5) eliptycznych
 - (2.6) parabolicznych
 - (2.7) hiperbolicznych
 - problemy konwekcji-dyfuzji
 - (2.8) ogólna postać, warunki brzegowe
17. Podaj ogólną postać i krótko scharakteryzuj właściwości równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu eliptycznego. Przedstaw przykłady dla wybranych problemów fizycznych.
 18. Podaj ogólną postać i krótko scharakteryzuj właściwości równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu parabolicznego. Przedstaw przykłady dla wybranych problemów fizycznych.
 19. Podaj ogólną postać i krótko scharakteryzuj właściwości równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu hiperbolicznego. Przedstaw przykłady dla wybranych problemów fizycznych.
 20. Podaj warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań (w szczególności możliwe i wymagane warunki brzegowe) dla problemów brzegowych typu eliptycznego. Dla konkretnej postaci równania podaj przykładowe wzory warunków brzegowych.
 21. Podaj warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań (w szczególności możliwe i wymagane warunki brzegowe) dla problemów początkowo-brzegowych typu parabolicznego. Dla konkretnej postaci równania podaj przykładowe wzory warunków brzegowych.
 22. Podaj warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań (w szczególności możliwe i wymagane warunki brzegowe) dla problemów początkowo-brzegowych typu hiperbolicznego (w szczególności jako zasad zachowania). Dla konkretnej postaci równania podaj przykładowe wzory warunków brzegowych.
 23. Dla niestacjonarnego równania czystej konwekcji (adwekcji) w obszarze 1D zilustruj istnienie krzywych charakterystycznych i zjawiska unoszenia (adwekcji) wykresu niewiadomej funkcji z chwili początkowej. Przedstaw równanie czystej konwekcji (adwekcji) jako warunek dla pochodnej kierunkowej wzdłuż krzywej charakterystycznej i ogólną postać rozwiązania.
 24. Dla niestacjonarnego równania czystej konwekcji (adwekcji) pokaż, że sprowadza się ono do warunku dla pochodnej w kierunku związanym z prędkością unoszenia. Zilustruj przepływ dla równania jednorodnego w obszarze 1D, stałego pola prędkości unoszenia i zadanego początkowego rozkładu unoszonej niewiadomej, reprezentującej pewną wielkość fizyczną.
 25. Przedstaw równanie stacjonarnego zagadnienia konwekcji-dyfuzji dla zmiennej skalarnej w obszarze jednowymiarowym. Omów charakter rozwiązania dla przypadku dominującej dyfuzji i dominującej konwekcji.

- ogólna idea dyskretyzacji i błąd dyskretyzacji, aproksymacja, zbieżność (rzęd zbieżności)
 - dyskretyzacja:
 - (4.1) obszaru obliczeniowego (przykładowo: interpolacja brzegu, triangulacja wewnątrz), typy siatek (strukturalne, niestructuralne)
 - (4.2) funkcji (przykładowo: interpolacja)
 - (4.3) problemów brzegowych i początkowo-brzegowych
 - ogólna idea metod dyskretyzacji (aproksymacji) problemów brzegowych i początkowo-brzegowych
 - (4.4) MRS (*FDM*), wyprowadzenie schematów, wzorzec (*stencil*)
 - (4.5) MES (*FEM*), dwie podstawy MES
 - (4.6) MOS (*FVM*), postać dyskretyzowanego problemu, objętość kontrolna
 - ogólne warunki zbieżności metod dyskretyzacji (aproksymacji) problemów brzegowych i początkowo-brzegowych
 - (4.7) stabilność, względna i bezwzględna
 - (4.8) spójność, warunki zbieżności metod aproksymacji
 - (4.9) dokładność, rząd metody
 - dyskretyzacja czasowa MRS
 - (4.10) metody jawne i niejawne
 - (4.11) metoda niejawna Eulera
 - (4.12) metoda Cranka-Nicolson
 - (4.13) zbieżność w czasie do stanu ustalonego, rozwiązywanie zadań stacjonarnych
 - modelowanie zagadnień konwekcji-dyfuzji z dominującą konwekcją
 - (4.14) stabilność aproksymacji, liczba *Pecleta*
 - (4.15) stabilizacja dla dyskretyzacji MES zagadnień z dominującą konwekcją, metoda SUPG

26. Podaj jakie warunki powinna spełniać dyskretyzacja obszaru na komórki, elementy lub tp.. Jak można zdefiniować i jak zachowuje się błąd dyskretyzacji obszaru.
27. Scharakteryzuj różnice między siatkami strukturalnymi i niestructuralnymi. Podaj wady i zalety każdego z typów. Z jakimi technikami dyskretyzacji równań różniczkowych cząstkowych związane są różne typy siatek?
28. Opisz proces interpolacji funkcji za pomocą wielomianów i funkcji kawałkami wielomianowych. Jak zachowuje się błąd interpolacji, podaj oszacowanie błędu dla różnych typów interpolacji (w 1D, 2D, 3D, wielomianowej, kawałkami wielomianowej, dla różnych stopni wielomianów).
29. Wyprowadź kilka przykładowych wzorów różnicowych dla pierwszej pochodnej funkcji korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora, które używa wartości funkcji w punktach odległych o h wzdłuż osi x . Określ rząd wielkości błędu uzyskanej aproksymacji pierwszej pochodnej funkcji.
30. Wyprowadź dowolny wzór różnicowy dla drugiej pochodnej funkcji korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora, które używa wartości funkcji w punktach odległych o h wzdłuż osi x . Określ rząd wielkości błędu uzyskanej aproksymacji drugiej pochodnej funkcji.
31. Przedstaw przykład zastosowania dyskretyzacji metodą różnic skończonych dla zadanego eliptycznego równania różniczkowego w jednowymiarowym obszarze przestrzennym.

Czym jest tzw. szablon (*stencil*), jakie jest jego znaczenie w procesie rozwiązywania układu równań liniowych związanego z dyskretyzacją?

32. Przedstaw przykład zastosowania jawnej dyskretyzacji metodą różnic skończonych dla zadanego (parabolicznego lub hiperbolicznego) niestacjonarnego równania różniczkowego cząstkowego z jednowymiarowym obszarem przestrzennym. Czym jest tzw. szablon (*stencil*), jakie jest jego znaczenie w procesie rozwiązywania układu równań liniowych związanego z dyskretyzacją?
33. Przedstaw przykład zastosowania niejawnej dyskretyzacji metodą różnic skończonych dla zadanego (parabolicznego lub hiperbolicznego) niestacjonarnego równania różniczkowego cząstkowego z jednowymiarowym obszarem przestrzennym. Czym jest tzw. szablon (*stencil*), jakie jest jego znaczenie w procesie rozwiązywania układu równań liniowych związanego z dyskretyzacją?
34. Czym jest rząd metody aproksymacji (dyskretyzacji). Podaj przykład schematu różnicowego aproksymacji równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego z dokładnością rzędu pierwszego i rzędu drugiego.
35. Podaj przykład jawnej i niejawnej aproksymacji metodą różnic skończonych problemu wymiany ciepła zależnego od czasu w jednym wymiarze przestrzennym (bez konwekcji). Jakie są podstawowe różnice, z obliczeniowego punktu widzenia, pomiędzy metodami aproksymacji jawnymi i niejawnymi?
36. Przedstaw ideę metody objętości skończonych, np. dla wektorowej lub skalarnej postaci wybranego prawa zachowania – jakie są podstawowe zasady (dyskretyzacja obszaru i równań) oraz dodatkowe techniki w praktycznych obliczeniach.
37. Na czym polega stabilność metody dyskretyzacji równań różniczkowych cząstkowych? Czym różni się stabilność względna od bezwzględnej? W przypadku jakich problemów często pojawiają się problemy ze stabilnością aproksymacji? Podaj przykład bezwzględnie stabilnej metody dyskretyzacji równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.
38. Czym jest spójność (*consistency*) metody dyskretyzacji? Jak brzmi podstawowe twierdzenie analizy numerycznej? Podaj przykład spójnej i niespójnej metody dyskretyzacji (np. metody z sztuczną lepkością dla równania czystej konwekcji).
39. Scharakteryzuj tzw. metodę α -dyskretyzacji równań różniczkowych zwyczajnych. Omów trzy podstawowe warianty metody: jawną metodę Eulera, niejawną metodę Eulera i metodę Cranka-Nicolson.
40. Czym jest *upwinding* przy dyskretyzacji równań różniczkowych czystej konwekcji lub z dominującą konwekcją? Jakim trudnością przy dyskretyzacji zapobiega? Podaj przykładowy schemat stosujący *upwinding*.
41. Czym jest liczba CFL? Jakie jest jej znaczenie przy dyskretyzacji problemów zależnych od czasu z dominującą konwekcją, w szczególności metodami jawnymi?
42. Kiedy stosowana jest metoda całkowania w czasie w celu rozwiązania zadań stacjonarnych? W jaki sposób przebiega proces aproksymacji? Jakie są wady i zalety metod jawnych i niejawnych dyskretyzacji czasowej użytych w takiej sytuacji?

43. Na czym polega stabilizacja przy dyskretyzacji metodą elementów skończonych stacjonarnych równań konwekcji-dyfuzji z dominującą konwekcją? W jaki sposób można osiągnąć spójność dyskretyzacji ze stabilizacją? Omów poglądowo stabilizację SUPG.

44. Zdefiniuj elementową liczbę Pecleta dla dyskretyzacji zagadnień stacjonarnych konwekcji-dyfuzji. Jaki wpływ ma ona na stabilność rozwiązań? Naskicuj krzywe zbieżności aproksymacji MES dla zadania czystej konwekcji w 1D w zależności od liczby Pecleta.

- idea metody elementów skończonych dla zagadnień eliptycznych
 - sformułowanie słabe
 - (5.1) idea otrzymywania na podstawie równań różniczkowych, funkcje testujące
 - (5.2) norma funkcji, typy norm
 - (5.3) przestrzenie funkcyjne, podział ze względu na istnienie i ciągłość pochodnych, funkcje całkowalne, przestrzenie Sobolewa
 - (5.4) uwzględnienie warunków brzegowych Dirichleta
 - (5.5) uwzględnienie warunków brzegowych Neumanna
 - (5.6) równoważność sformułowań różniczkowych i całkowych
 - oszacowanie błędu aproksymacji MES
 - (5.7) "best approximation property"
 - (5.8) oszacowanie *a priori* (na podstawie błędu interpolacji i "best approximation property")
 - (5.9) zbieżność do rozwiązania dokładnego, rząd zbieżności

45. Podaj i graficznie zilustruj 3 przykładowe normy w przestrzeni funkcji na odcinku $[0,1]$

46. Mając sformułowanie słabe dla problemu brzegowego z warunkiem Dirichleta, uzupełnij je w przypadku dodania warunku brzegowego Neumanna (Robina)

47. Dla zadanego problemu brzegowego w 1D, 2D, 3D wyprowadź sformułowanie słabe.

48. W jaki sposób uwzględniane są warunki brzegowe Dirichleta w sformułowaniu słabym. Podaj przykład problemu brzegowego z warunkiem Dirichleta wraz z odpowiadającym mu sformułowaniem słabym.

49. Omów metodę funkcji kary, jako sposób wymuszania spełnienia warunków brzegowych Dirichleta w symulacjach MES.

50. Scharakteryzuj własność najlepszej aproksymacji (*best approximation property*) dla rozwiązań uzyskiwanych metodą elementów skończonych. W jaki sposób jest ona wykorzystywana do uzyskania oszacowania *a priori* błędu MES?

51. Podaj ogólny wzór oszacowania *a priori* błędu aproksymacji MES. Jakie wynikają z niego wnioski, pozwalające uzyskiwać bardziej dokładne rozwiązania.

52. Przedstaw wykresy zbieżności dla różnych typów aproksymacji MES.

- techniczne aspekty aproksymacji MES
 - triangulacja obszaru obliczeniowego

- (6.1) wymagania w stosunku do podziału na elementy
- (6.2) jakość siatki (i jej wpływ na błąd aproksymacji)
- (6.3) typy elementów (w 2D, w 3D)
- funkcje kształtu
 - (6.4) wielomiany Lagrange'a stopnia p
 - (6.5) wielomiany hierarchiczne stopnia p
- funkcje bazowe
 - (6.6) konstrukcja funkcji bazowych z funkcji kształtu
 - (6.7) interpolacja MES
 - (6.8) postać funkcji niewiadomej, stopnie swobody, kombinacja liniowa funkcji bazowych

53. Jakie są warunki poprawnej dyskretyzacji (triangulacji) obszaru obliczeniowego w MES. Jakie geometryczne warunki powinny spełniać elementy skończone. Omów podstawowe typy elementów stosowane do triangulacji obszarów w 1D, 2D, 3D. Podaj ich wady i zalety.
54. Zilustruj podstawowe typy geometrii elementów skończonych w 1D, 2D, 3D. W jaki sposób geometria elementu jest definiowana na podstawie tzw. elementu odniesienia (referencyjnego)?
55. Zilustruj funkcje kształtu Lagrange'a pierwszego stopnia dla elementów odniesienia: trójkątnego i prostokątnego.
56. Zilustruj funkcje kształtu Lagrange'a drugiego stopnia dla elementu odniesienia będącego prostokątem.
57. Zilustruj funkcje kształtu Lagrange'a drugiego stopnia dla elementu odniesienia będącego trójkątem.
58. Porównaj konstrukcję funkcji bazowych w obszarze 1D dla aproksymacji drugiego stopnia w przypadku użycia wielomianów Lagrange'a i hierarchicznych funkcji kształtu. Jakie są wady/zalety użycia funkcji kształtu każdego z typów.
59. Porównaj konstrukcję funkcji bazowych w obszarze 1D dla aproksymacji trzeciego stopnia w przypadku użycia wielomianów Lagrange'a i hierarchicznych funkcji kształtu. Jakie są wady/zalety użycia funkcji kształtu każdego z typów.
60. Porównaj konstrukcję funkcji bazowych w obszarze 1D dla aproksymacji czwartego stopnia w przypadku użycia wielomianów Lagrange'a i hierarchicznych funkcji kształtu. Jakie są wady/zalety użycia funkcji kształtu każdego z typów.
61. Przedstaw proces interpolacji dowolnej zadanej funkcji w obszarze 1D za pomocą funkcji z przestrzeni MES rozpiętej na funkcjach bazowych, w przypadku konstrukcji funkcji bazowych na podstawie hierarchicznych funkcji kształtu, będących wielomianami drugiego stopnia.
62. Przedstaw proces interpolacji dowolnej zadanej funkcji w obszarze 1D za pomocą funkcji z przestrzeni MES rozpiętej na funkcjach bazowych, w przypadku konstrukcji funkcji bazowych na podstawie funkcji kształtu, będących wielomianami Lagrange'a pierwszego stopnia

63. Przedstaw proces interpolacji dowolnej zadanej funkcji w obszarze 1D za pomocą funkcji z przestrzeni MES rozpiętej na funkcjach bazowych, w przypadku konstrukcji funkcji bazowych na podstawie funkcji kształtu, będących wielomianami Lagrange'a drugiego stopnia
64. Przedstaw proces konstrukcji dowolnej funkcji w przestrzeni MES dla obszaru 1D jako kombinacji liniowej funkcji bazowych w przypadku użycia funkcji kształtu będących wielomianami Lagrange'a drugiego stopnia
65. Przedstaw proces konstrukcji dowolnej funkcji w przestrzeni MES dla obszaru 1D jako kombinacji liniowej funkcji bazowych w przypadku użycia hierarchicznych funkcji kształtu będących wielomianami drugiego stopnia
- procedury rozwiązywania układów równań nieliniowych i liniowych
 - tworzenie układów równań (liniowych lub nieliniowych) na podstawie sformułowania słabego MES
 - (7.1) postać elementów macierzy układów równań
 - (7.2) całkowanie numeryczne, elementy odniesienia
 - (7.3) agregacja układu równań liniowych
 - (7.4) postać macierzy układu równań – rola numerowania i przenumerowania węzłów
 - (7.5) cechy macierzy układu równań
 - rozwiązywanie układów równań nieliniowych
 - (7.6) metoda Newtona
 - (7.7) metoda Picarda (*fixed point iterations*)
 - rozwiązywanie układów równań liniowych
 - (7.8) metody bezpośrednie, złożoność obliczeniowa i jej zależność od struktury układu, "fill-in"
 - (7.9) idea algorytmu przenumerowania opartego na przeglądaniu grafu wszerek
 - metody iteracyjne
 - (7.10) metody iteracji prostej, zbieżność
 - (7.11) metody podprzestrzeni Kryłowa, poprawa uwarunkowania
66. Dla zadanej siatki i postaci aproksymacji MES (rząd oraz typ – Lagrange'a lub hierarchiczny) przedstaw strukturę (wyrazów niezerowych) globalnej macierzy układu równań (macierzy sztywności). W jaki sposób można zmienić strukturę wyrazów niezerowych macierzy? W jakim przypadku zmiana struktury ma istotne znaczenie w procesie uzyskiwania rozwiązania (w szczególności dla czasu obliczeń)?
67. Dla zadanej siatki i postaci aproksymacji MES (rząd oraz typ – Lagrange'a lub hierarchiczny) podaj strukturę lokalnej macierzy sztywności dla pojedynczego elementu i schemat jej agregacji do globalnego układu równań liniowych.
68. Mając zadane sformułowanie słabe przedstaw jakie całki będą obliczane dla pojedynczego elementu podczas tworzenia elementowej macierzy sztywności.
69. Przedstaw proces całkowania numerycznego z wykorzystaniem elementu odniesienia. Podaj wzory (dla całek z funkcji kształtu oraz ich pochodnych) i graficzną ilustrację procesu dla przykładu siatki z kilkoma elementami.

70. Mając zadane sformułowanie słabe (całkowe) MES dokonaj jego transformacji do układu równań liniowych. Jak wykorzystuje się fakt, że równanie całkowe w sformułowaniu MES jest prawdziwe dla dowolnej funkcji testującej?
71. Omów własności bezpośrednich metod rozwiązywania wielkich rzadkich układów równań liniowych, powstających przy aproksymacji zagadnień eliptycznych metodą elementów skończonych.
72. Omów własności iteracyjnych metod rozwiązywania wielkich rzadkich układów równań liniowych, powstających przy aproksymacji zagadnień eliptycznych metodą elementów skończonych. Podaj przykłady metod iteracyjnych i wybrane algorytmy (np. dla metod iteracji prostej – Jacobiego i Gaussa-Seidla).
73. Czym jest poprawa uwarunkowania macierzy układu równań liniowych (*preconditioning*). Kiedy i w jaki sposób jest stosowana?
74. Podaj wzory dla metody Newtona i metody Picarda rozwiązywania układów równań nieliniowych o postaci: $A(U)U=b$, powstających przy aproksymacji zagadnień eliptycznych metodą elementów skończonych.
75. Zilustruj graficznie proces zbieżności metody Newtona dla nieliniowego równania jednej zmiennej. Podaj wzory charakterystyczne dla metody w tym przypadku.
76. Zilustruj graficznie proces zbieżności metody Picarda dla nieliniowego równania jednej zmiennej. Podaj wzory charakterystyczne dla metody w tym przypadku.
- modelowanie zagadnień zależnych od czasu metodą linii MES-MRS
 - dyskretyzacja przestrzenna
 - (8.1) sformułowanie słabe, pochodne w sformułowaniu słabym
 - (8.2) założenia co do postaci funkcji aproksymującej
 - (8.3) transformacja do układu równań różniczkowych zwyczajnych
 - (8.4) postać równań, zwyczajowe nazwy macierzy współczynników
 - dyskretyzacja czasowa MRS
 - (8.5) postać schematów całkowania w czasie dla metody linii
 - (8.6) zbieżność w czasie do stanu ustalonego, rozwiązywanie zadań stacjonarnych
77. Przedstaw założenia dyskretyzacji niestacjonarnych zagadnień konwekcji-dyfuzji metodą linii. Jaka jest zakładana postać funkcji niewiadomej i jej pochodnych?
78. Omów proces dyskretyzacji metodą linii, wykorzystujący specjalną postać funkcji aproksymującej, dla wybranego zagadnienia konwekcji-dyfuzji. Podaj sformułowanie słabe MES uzyskiwane w pierwszym etapie dyskretyzacji.
79. Przedstaw proces przekształcenia równania różniczkowego cząstkowego konwekcji-dyfuzji w układ równań różniczkowych zwyczajnych w metodzie linii. Jakie są zwyczajowe nazwy macierzy współczynników w tym układzie?
80. Podaj postać schematów całkowania w czasie MRS dla układu równań różniczkowych zwyczajnych powstałego po dyskretyzacji przestrzennej dla zadania konwekcji-dyfuzji.

81. Dla zadanej postaci sformułowania słabego wskaż człony związane z różnymi typami wyrażeń w sformułowaniu analitycznym (np. człony związane z pochodną czasową, z dyfuzją, konwekcją, itp.) i omów ich wpływ na rozwiązanie dokładne oraz na techniki i efekt dyskretyzacji.

- błędy przy modelowaniu i modelowanie adaptacyjne
 - rodzaje błędów, źródła, sposoby redukcji
 - (9.1) błąd modelowania
 - (9.2) błąd danych, parametrów wejściowych
 - (9.3) błąd dyskretyzacji
 - (9.4) błąd zaokrągleń
 - adaptacja
 - (9.5) idea, szacowanie błędu *a posteriori*
 - (9.6) typy adaptacji: *r*, *h*, *p*, *hp*, *remeshing* – zbieżność
 - (9.7) osobliwości rozwiązania

82. Omów różne typy błędów pojawiających się w modelowaniu matematycznym i numerycznym zagadnień opisywanych równaniami różniczkowymi. W jaki sposób można minimalizować każdy z rodzajów błędu?

83. Scharakteryzuj różne typy adaptacji MES. Jak przebiega proces uzyskiwania rozwiązania z użyciem adaptacji dla zadań eliptycznych?

84. Scharakteryzuj różne typy adaptacji MES. Jak przebiega proces uzyskiwania rozwiązania z użyciem adaptacji dla zadań zależnych od czasu?

85. Czym jest osobliwość rozwiązania? W jaki sposób przebiega modelowanie adaptacyjne dla zagadnień osobliwych? W jaki sposób można przyspieszyć uzyskiwanie dokładnych wyników?